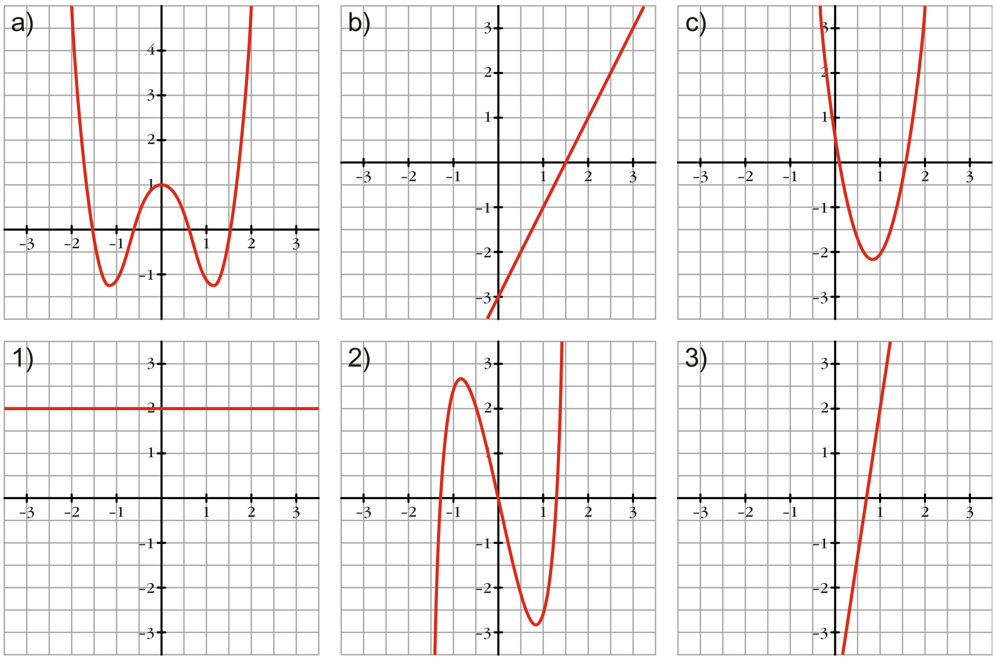
Técnicas de derivación

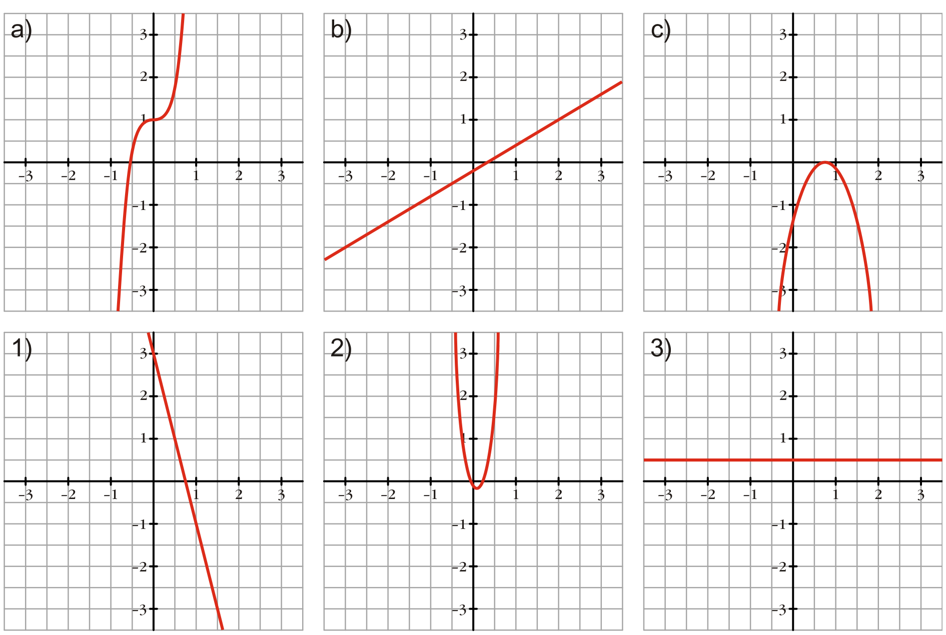
Ejercicio nº 1.-

Las gráficas 1, 2 y 3 corresponden, en otro orden, a las funciones derivadas de las gráficas a), b) y c). ¿Cuál es la derivada de cuál? Razona tu respuesta:



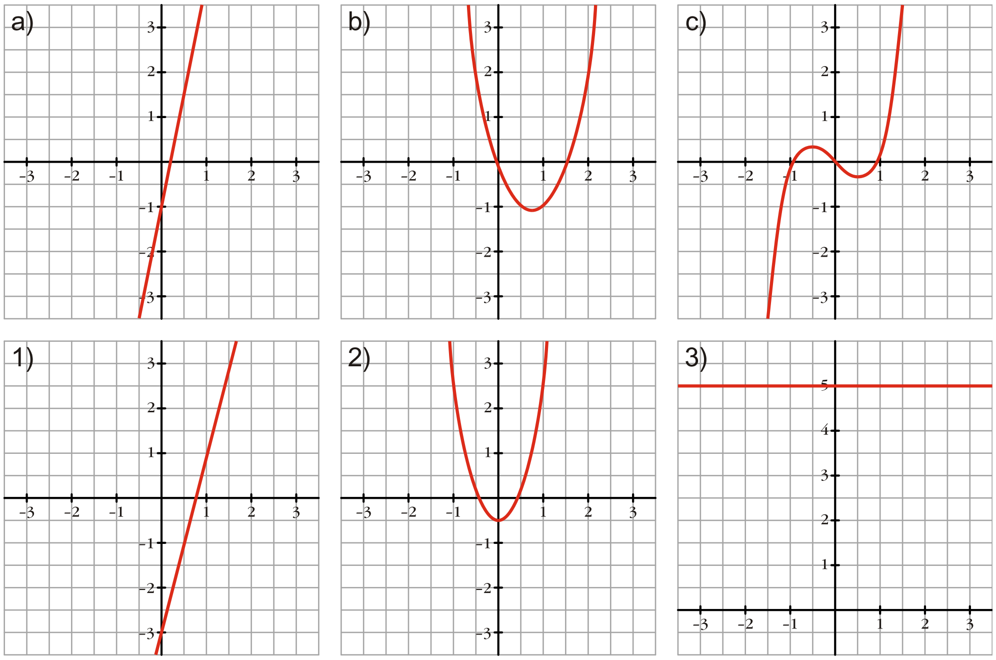
Ejercicio nº 2.-

Asocia cada una de las siguientes gráficas [a), b), c)] con la de su derivada. Justifica tu respuesta:



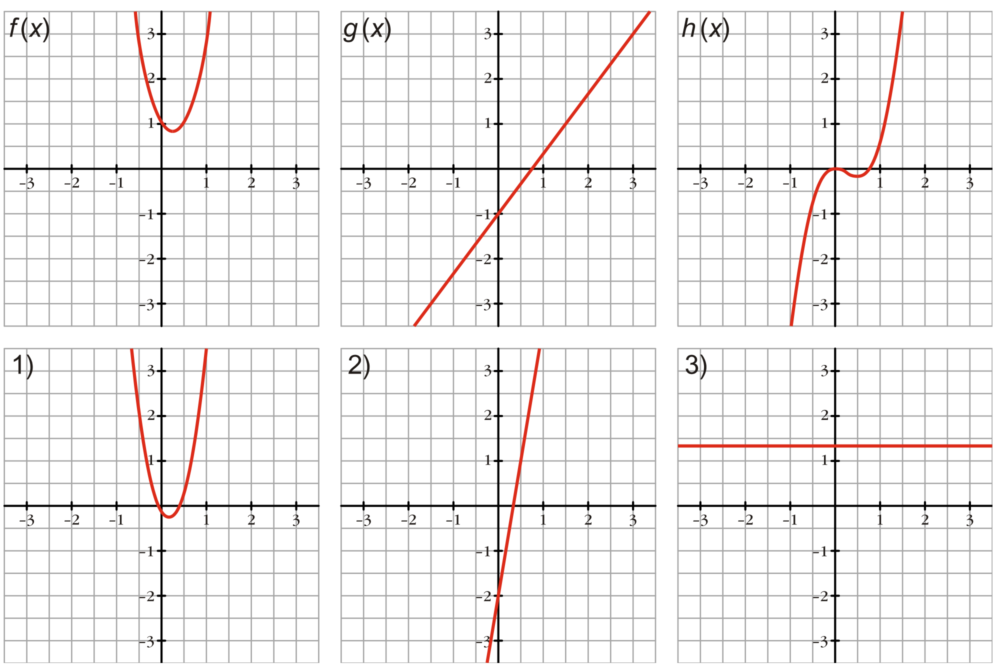
Ejercicio nº 3.-

Asocia cada gráfica [a), b), c)] con la de su función derivada. Razona tu respuesta:



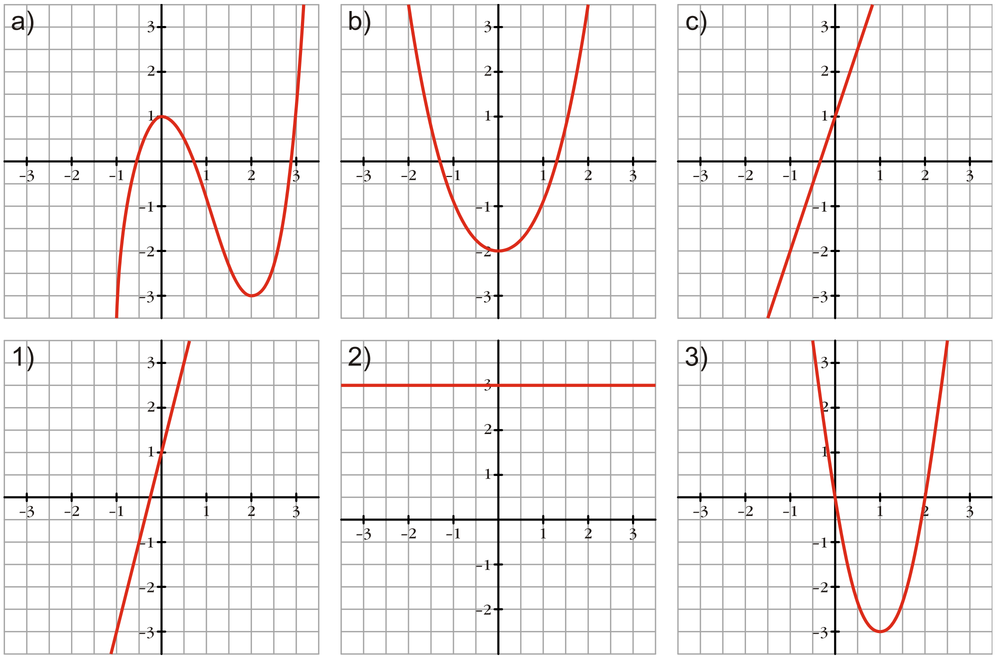
Ejercicio nº 4.-

¿Cuál de las gráficas 1, 2, 3 representa la derivada de *f* (*x*)? ¿Y la de *g* (*x*)? ¿Y la de *h* (*x*)? Justifica tus respuestas:



Ejercicio nº 5.-

La gráficas 1, 2 y 3 son las funciones derivadas de las gráficas a), b) y c), pero en otro orden. ¿Cuál es la derivada de cuál? Justifica tu respuesta.



Ejercicio nº 6.-

Obtén el valor de $f'(3)$, utilizando la definición de derivada, para la función:

$$f(x)=\frac{x-2}{x+1}$$

Ejercicio nº 7.-

Halla la derivada de la función $f(x)$, en $x_0=-1$, utilizando la definición de derivada:

$$f(x)=\frac{4x^2+1}{2}$$

Ejercicio nº 8.-

a) Halla la T.V.M. de la función $f(x)=\frac{-x^2+1}{3}$ en el intervalo $[2,\ 2+h]$.

b) Con el resultado obtenido, calcula $f'(2)$.

Ejercicio nº 9.-

a) Halla la T.V.M. de la función $f(x)=\frac{3}{x+1}$ en el intervalo $[1,\ 1+h]$.

b) Con el resultado obtenido, calcula $f'(1)$.

Ejercicio nº 10-

Calcula $f'(2)$, utilizando la definición de derivada, siendo:

$$f(x) = 2x^2 + 5x$$

Ejercicio nº 11-

La función $f(x)$ está definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+x+1 & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ 5 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y su derivabilidad.

Ejercicio nº 12-

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<0 \\ x-2 & \text{si} \quad 0\le x<4 \\ x^2-2x-6 & \text{si} \quad x\ge 4 \end{cases}$$

estudia su continuidad y su derivabilidad.

Ejercicio nº 13-

Halla los valores de m y n para que la siguiente función sea continua y derivable en P:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+m & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^2-nx & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 14-

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en P:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax & \text{si} \quad x\le 1 \\ bx^2+2x-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 15-

Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+2 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 3x+1 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 16-

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x^2 \operatorname{sen} x$ b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$

Ejercicio nº 17-

Halla la derivada de:

a) $f(x) = \left(5\sqrt{x} - 3\right)e^x$ b) $f(x) = \dfrac{2x(x+1)}{x^2 - 2}$

Ejercicio nº 18-

Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{4 + \sqrt{x}}{x^2 + 1}$ b) $f(x) = e^x \cos x + \ln x$

Ejercicio nº 19-

Halla la derivada de las funciones:

a) $y = \left(x - \sqrt{x}\right)e^x$ b) $y = \dfrac{x^2 - 1}{3x^3 + 2}$

Ejercicio nº 20-

Obtén la función derivada de cada una de las funciones siguientes:

a) $y = \left(3x^4 + \sqrt[5]{x}\right)\ln x$ b) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{1 - x^2}$

Ejercicio nº 21-

Obtén la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = \log_2\left(3x^2 - 2\right)$ b) $f(x) = \left(e^x + 3x^3\right)^2$

Ejercicio nº 22-

Deriva estas funciones:

a) $y = \operatorname{sen}^2\left(x^2 - 3\right)$ b) $y = \dfrac{4x}{(3x+1)^2}$

Ejercicio nº 23-

Halla la derivada de estas funciones:

a) $y = \left(3x^2 - 4\right)^5$ **b)** $y = ln\left(\dfrac{2x}{3x+1}\right)$

Ejercicio nº 24-

Calcula la derivada de:

a) $f(x) = cos^2(3x)$ **b)** $f(x) = e^{3x-4} + ln\left(\dfrac{4x+1}{2x}\right)$

Ejercicio nº 25-

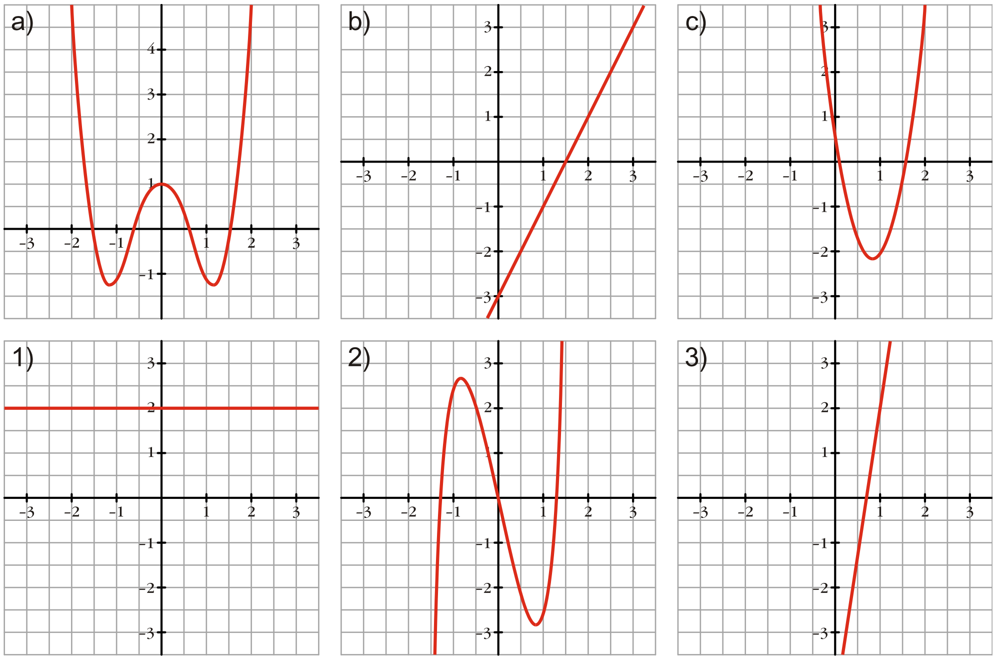
Calcula la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x+3}}$ **b)** $f(x) = ln\left(x^3 - 3x\right)$

Soluciones Técnicas derivación

Ejercicio nº 1.-

Las gráficas 1, 2 y 3 corresponden, en otro orden, a las funciones derivadas de las gráficas a), b) y c). ¿Cuál es la derivada de cuál? Razona tu respuesta:



Solución:

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal es positiva donde la función es creciente y es negativa donde la función decrece. Por tanto:

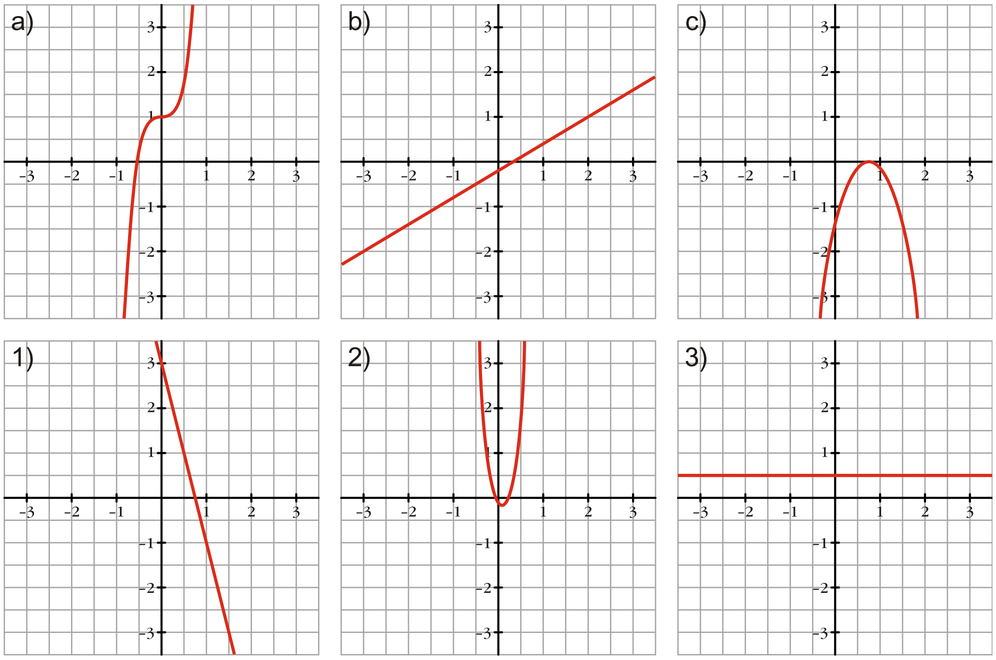
a) 2

b) 1

c) 3

<u>Ejercicio nº 2.-</u>

Asocia cada una de las siguientes gráficas [a), b), c)] con la de su derivada. Justifica tu respuesta:



Solución:

La derivada vale cero en los puntos de tangente horizontal es positiva donde la función es creciente y es negativa donde la función decrece. Por tanto:

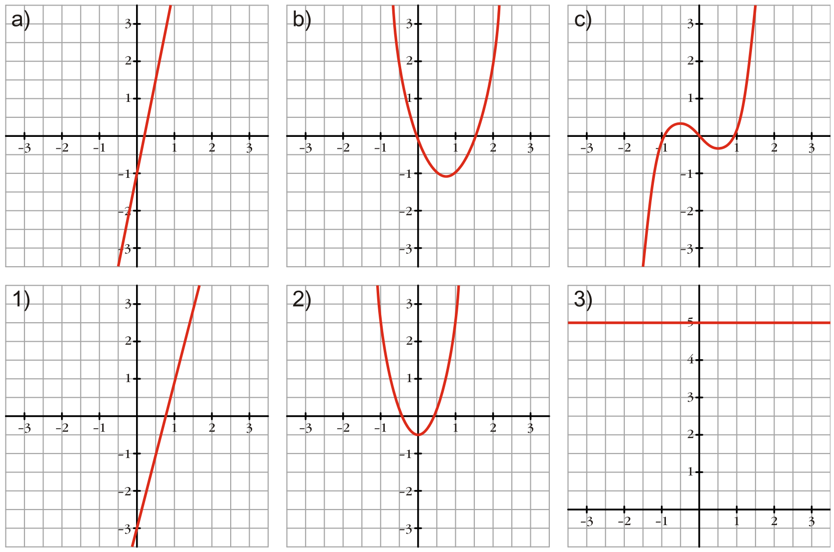
a) 2

b) 3

c) 1

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Asocia cada gráfica [a), b), c)] con la de su función derivada. Razona tu respuesta:



Solución:

La derivada vale cero en los puntos de tangente horizontal es positiva donde la función es creciente y es negativa donde la función decrece. Por tanto:

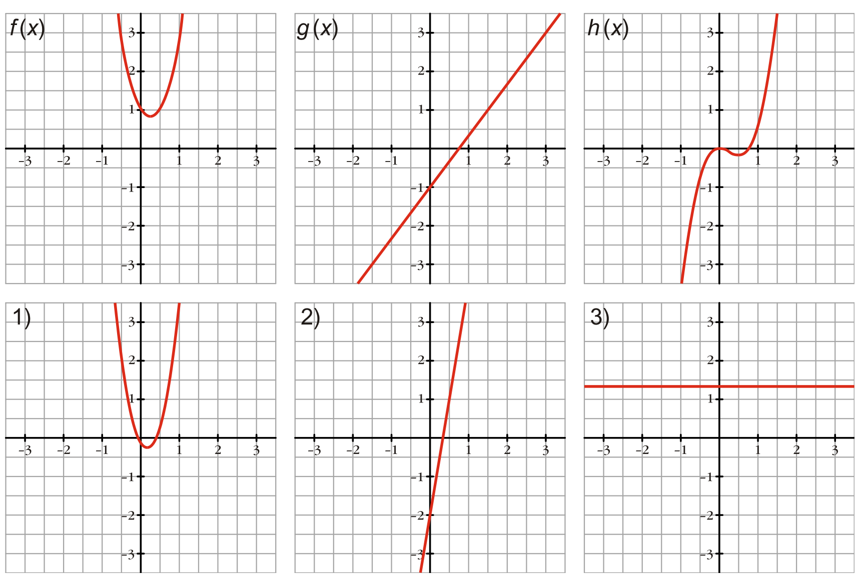
a) 3

b) 1

c) 2

Ejercicio nº 4.-

¿Cuál de las gráficas 1, 2, 3 representa la derivada de *f* (*x*)? ¿Y la de *g* (*x*)? ¿Y la de *h* (*x*)? Justifica tus respuestas:



Solución:

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal es positiva donde la función es creciente y es negativa donde la función decrece. Por tanto:

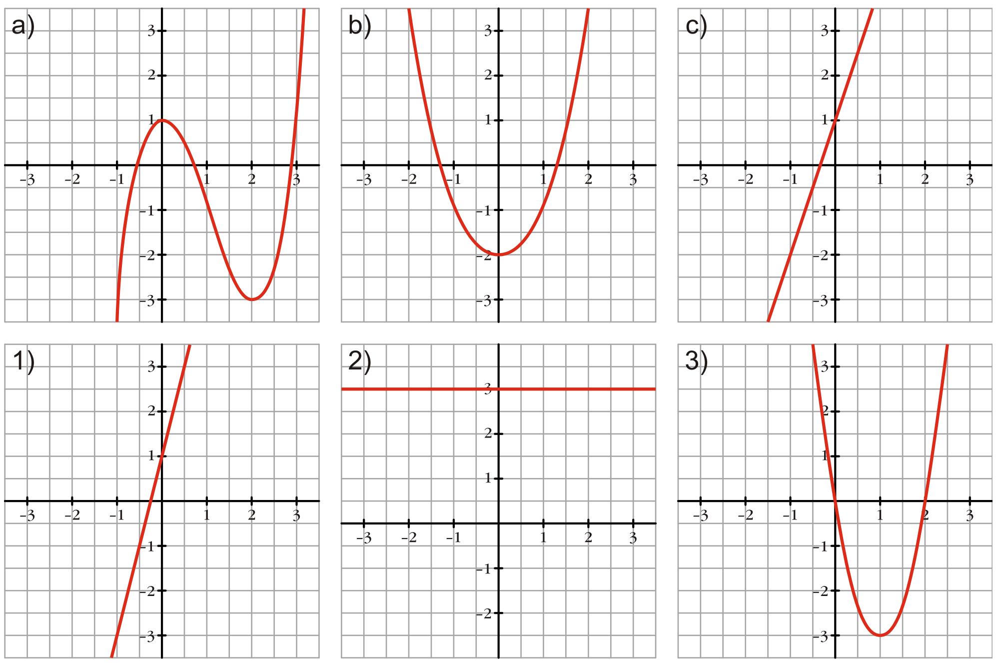
1) $h'(x)$

2) $f'(x)$

3) $g'(x)$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

La gráficas 1, 2 y 3 son las funciones derivadas de las gráficas a), b) y c), pero en otro orden. ¿Cuál es la derivada de cuál? Justifica tu respuesta.



Solución:

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente y es negativa donde la función decrece. Por tanto:

a) 3

b) 1

c) 2

Ejercicio nº 6.-

Obtén el valor de $f'(3)$, utilizando la definición de derivada, para la función:

$$f(x)=\frac{x-2}{x+1}$$

Solución:

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3+h-2}{3+h+1}-\frac{1}{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h+1}{h+4}-\frac{1}{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+4-h-4}{4h(h+4)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{4h(h+4)}=\lim_{h\to 0}\frac{3}{4(h+4)}=\frac{3}{16}$$

Ejercicio nº 7.-

Halla la derivada de la función $f(x)$, en $x_0=-1$, utilizando la definición de derivada:

$$f(x)=\frac{4x^2+1}{2}$$

Solución:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4(-1+h)^2+1}{2}-\frac{5}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4(1-2h+h^2)+1}{2}-\frac{5}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4-8h+4h^2+1-5}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h^2-8h}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h(2h-4)}{2h}=\lim_{h\to 0}(2h-4)=-4$$

Ejercicio nº 8.-

a) Halla la T.V.M. de la función $f(x)=\frac{-x^2+1}{3}$ en el intervalo $[2,\ 2+h]$.

b) Con el resultado obtenido, calcula $f'(2)$.

Solución:

$$\text{a) T.V.M.}[2,\ 2+h]=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\frac{-(2+h)^2+1}{3}-\frac{(-3)}{3}}{h}=\frac{-(4+4h+h^2)+1+3}{3h}=$$

$$=\frac{-4-4h-h^2+4}{3h}=\frac{h(-4-h)}{3h}=\frac{-4-h}{3}$$

b) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-4-h)}{3}=\frac{-4}{3}$

Ejercicio nº 9.-

a) Halla la T.V.M. de la función $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$ en el intervalo $[1,\,1+h]$.

b) Con el resultado obtenido, calcula $f'(1)$.

Solución:

a) $\text{T.V.M.}[1,\,1+h]=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\dfrac{3}{1+h+1}-\dfrac{3}{2}}{h}=\dfrac{\dfrac{3}{h+2}-\dfrac{3}{2}}{h}=\dfrac{\dfrac{6-3(h+2)}{2(h+2)}}{h}=$

$$=\frac{6-3h-6}{2h(h+2)}=\frac{-3h}{2h(h+2)}=\frac{-3}{2(h+2)}$$

b) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-3}{2(h+2)}=\dfrac{-3}{4}$

Ejercicio nº 10-

Calcula $f'(2)$, utilizando la definición de derivada, siendo:

$f(x) = 2x^2 + 5x$

Solución:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)^2+5(2+h)-18}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(4+4h+h^2)+10+5h-18}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{8+8h+2h^2+10+5h-18}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+13h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2h+13)}{h}=\lim_{h\to 0}(2h+13)=13$$

Ejercicio nº 11-

La función $f(x)$ está definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si } x<0 \\ x^2+x+1 & \text{si } 0\le x<2 \\ 5 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y su derivabilidad.

Solución:

- Continuidad:

  – Si $x \neq 0$ y $x \neq 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

  – En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^2 + x + 1\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

  - En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2 + x + 1\right) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 5 = 5 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{ no es continua en } x = 2.$$

- Derivabilidad:

  – Si $x \neq 0$ y $x \neq 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable, y su derivada es:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

  – En $x = 0$: Como $f'(0^-) = \ln 2 \neq f'(0^+) = 1$, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

– En $x = 2$: No es derivable, pues no es continua.

<u>Ejercicio nº 12-</u>

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 4 \\ x^2 - 2x - 6 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}}$$

estudia su continuidad y su derivabilidad.

Solución:

- Continuidad:

  – Si $x \neq 0$ y $x \neq 4$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

– En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-2) = -2 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ no es continua en } x = 0.$$

– En $x = 4$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (x-2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \left(x^2 - 2x - 6\right) = 2 \\ f(4) = 2 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ es continua en } x = 4.$$

- Derivabilidad:

– Si $x \neq 0$ y $x \neq 4$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

– En $x = 0$: No es derivable, pues no es continua.

– En $x = 4$: Como $f'(4^-) = 1 \neq f'(4^+) = 6$, $f(x)$ no es derivable en $x = 4$.

<u>Ejercicio nº 13-</u>

Halla los valores de m y n para que la siguiente función sea continua y derivable en $\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + m & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 - nx & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}}$$

Solución:

- Continuidad:

– Si $x \neq -1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

– En $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(x^2 + 3x + m\right) = m - 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(x^2 - nx\right) = n + 1 \\ f(-1) = m - 2 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $m - 2 = n + 1$, es decir: $m = n + 3$

- Derivabilidad:

  – Si $x \neq -1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x-n & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

  – En $x = -1$: $f'(-1^-) = 1$; $f'(-1^+) = -2 - n$

  Para que sea derivable, ha de ser $1 = -2 - n$, es decir: $n = -3$

- Uniendo las dos condiciones anteriores:

$$\left.\begin{array}{l} m = n+3 \\ n = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} m = 0 \\ n = -3 \end{array}$$

  (En este caso quedaría $f(x) = x^2 + 3x$ para todo x).

<u>Ejercicio nº 14-</u>

Calcula los valores de *a* y *b* para que *f* (*x*) sea continua y derivable en $\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \textbf{si} \quad x \leq 1 \\ bx^2 + 2x - 1 & \textbf{si} \quad x > 1 \end{cases}}$$

Solución:

- Continuidad:

  – Si $x \neq 1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

  – En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(2x^2 + ax\right) = 2 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(bx^2 + 2x - 1\right) = b + 1 \\ f(1) = 2 + a \end{array}\right\}$$

  Para que sea continua, ha de ser $2 + a = b + 1$, es decir: $a = b - 1$

- Derivabilidad:

  – Si $x \neq 1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x+a & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx+2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

  – En $x = 1$: Para que sea derivable, debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 4 + a \\ f'(1^+) = 2b + 2 \end{array}\right\} \quad 4 + a = 2b + 2 \;\rightarrow\; a = 2b - 2$$

- Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} a = b - 1 \\ a = 2b - 2 \end{array}\right\} \quad b - 1 = 2b - 2 \;\rightarrow\; b = 1 \;\rightarrow\; a = 0$$

<u>Ejercicio nº 15-</u>

Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } \; x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } \; 0 \le x < 1 \\ 3x + 1 & \text{si } \; x \ge 1 \end{cases}}$$

Solución:

- Continuidad:
  - Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \;\rightarrow\; f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.
  - En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(-x^2 + 2\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^2 + 2\right) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

  - En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 + 2\right) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3x + 1) = 4 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{ no es continua en } x = 1.$$

- Derivabilidad:
  - Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \;\rightarrow\; f(x)$ es derivable, y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } \; x < 0 \\ 2x & \text{si } \; 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } \; x > 1 \end{cases}$$

  - En $x = 0$: Como $f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$, $f(x)$ es derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

– En $x = 1$: No es derivable, pues no es continua.

<u>Ejercicio nº 16-</u>

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x^2\, sen x$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 2x\, sen\, x + x^2 \cos x$

b) $f'(x) = \dfrac{(4x-3)\, e^x - (2x^2 - 3x)\, e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x\,(4x - 3 - 2x^2 + 3x)}{(e^x)^2} = \dfrac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x}$

<u>Ejercicio nº 17-</u>

Halla la derivada de:

a) $f(x) = \left(5\sqrt{x} - 3\right)e^x$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x\,(x+1)}{x^2 - 2}$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}\, e^x + \left(5\sqrt{x} - 3\right)e^x = \left(\dfrac{5}{2\sqrt{x}} + 5\sqrt{x} - 3\right) e^x$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x}{x^2 - 2}$

$$f'(x) = \frac{(4x+2)\,(x^2-2) - (2x^2+2x)\cdot 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{4x^3 - 8x + 2x^2 - 4 - 4x^3 - 4x^2}{(x^2-2)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 8x - 4}{(x^2-2)^2}$$

<u>Ejercicio nº 18-</u>

Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{4 + \sqrt{x}}{x^2 + 1}$ **b)** $f(x) = e^x \cos x + \ln x$

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,(x^2+1)-(4+\sqrt{x})\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{8x+2x\sqrt{x}}{1}}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2+1-16x\sqrt{x}-4x^2}{2\sqrt{x}\,(x^2+1)^2}=$

$=\dfrac{-3x^2-16x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\,(x^2+1)^2}$

b) $f'(x)=e^x\cos x-e^x\,sen\,x+\dfrac{1}{x}$

Ejercicio nº 19-

Halla la derivada de las funciones:

a) $\boldsymbol{y=\left(x-\sqrt{x}\right)e^x}$ **b)** $\boldsymbol{y=\dfrac{x^2-1}{3x^3+2}}$

Solución:

a) $y'=\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^x+\left(x-\sqrt{x}\right)e^x=\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+x-\sqrt{x}\right)e^x$

b) $y'=\dfrac{2x\,(3x^3+2)-(x^2-1)\cdot 9x^2}{(3x^3+2)^2}=\dfrac{6x^4+4x-9x^4+9x^2}{(3x^3+2)^2}=\dfrac{-3x^4+9x^2+4x}{(3x^3+2)^2}$

Ejercicio nº 20-

Obtén la función derivada de cada una de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{y=\left(3x^4+\sqrt[5]{x}\right)\ln x}$ **b)** $\boldsymbol{y=\dfrac{x^2+3x}{1-x^2}}$

Solución:

a) $y'=\left(12x^3+\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\right)\ln x+\left(3x^4+\sqrt[5]{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x}=\left(12x^3+\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\right)\ln x+3x^3+\dfrac{\sqrt[5]{x}}{x}$

b) $y'=\dfrac{(2x+3)\,(1-x^2)-(x^2+3x)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2x-2x^3+3-3x^2+2x^3+6x^2}{(1-x^2)^2}=$

$=\dfrac{3x^2+2x+3}{(1-x^2)^2}$

Ejercicio nº 21-

Obtén la derivada de estas funciones:

a) $\boldsymbol{f(x)=log_2\left(3x^2-2\right)}$ **b)** $\boldsymbol{f(x)=\left(e^x+3x^3\right)^2}$

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{1}{3x^2-2}\cdot\dfrac{1}{ln2}\cdot 6x=\dfrac{6x}{(3x^2-2)\,ln2}$

b) $f'(x) = 2\,(e^x + 3x^3)\cdot(e^x + 9x^2)$

Ejercicio nº 22-

Deriva estas funciones:

a) $\boldsymbol{y=sen^2\left(x^2-3\right)}$ **b)** $\boldsymbol{y=\dfrac{4x}{(3x+1)^2}}$

Solución:

a) $y' = 2\,sen\,(x^2-3)\,cos\,(x^2-3)\cdot 2x = 4x\,sen\,(x^2-3)\,cos\,(x^2-3)$

b) $y'=\dfrac{4(3x+1)^2-4x\cdot 2(3x+1)\cdot 3}{(3x+1)^4}=\dfrac{(3x+1)[4(3x+1)-24x]}{(3x+1)^4}=\dfrac{12x+4-24x}{(3x+1)^3}=\dfrac{-12x+4}{(3x+1)^3}$

Ejercicio nº 23-

Halla la derivada de estas funciones:

a) $\boldsymbol{y=\left(3x^2-4\right)^5}$ **b)** $\boldsymbol{y=ln\left(\dfrac{2x}{3x+1}\right)}$

Solución:

a) $y'=5\left(3x^2-4\right)^4 6x=30x\left(3x^2-4\right)^4$

b) $y'=\dfrac{1}{\dfrac{2x}{3x+1}}\cdot\dfrac{2(3x+1)-2x\cdot 3}{(3x+1)^2}=\dfrac{(3x+1)}{2x}\cdot\dfrac{6x+2-6x}{(3x+1)^2}=\dfrac{(3x+1)\cdot 2}{2x(3x+1)^2}=$

$=\dfrac{1}{x(3x+1)}=\dfrac{1}{3x^2+x}$

Ejercicio nº 24-

Calcula la derivada de:

a) $f(x) = \cos^2(3x)$ **b)** $f(x) = e^{3x-4} + \ln\left(\dfrac{4x+1}{2x}\right)$

Solución:

a) $f'(x) = 2\cos(3x)(-\operatorname{sen}(3x)) \cdot 3 = -6\cos(3x)\operatorname{sen}(3x)$

b) $f'(x) = e^{3x-4} \cdot 3 + \dfrac{1}{\dfrac{4x+1}{2x}} \cdot \dfrac{4 \cdot 2x - (4x+1) \cdot 2}{(2x)^2} = 3e^{3x-4} + \dfrac{2x}{4x+1} \cdot \dfrac{8x - 8x - 2}{(2x)^2} =$

$= 3e^{3x-4} + \dfrac{-2}{(4x+1) \cdot (2x)} = 3e^{3x-4} - \dfrac{1}{4x^2 + x}$

Ejercicio nº 25-

Calcula la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x+3}}$ **b)** $f(x) = \ln(x^3 - 3x)$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x}{x+3}}} \cdot \dfrac{2(x+3) - 2x}{(x+3)^2} = \dfrac{\sqrt{x+3}}{2\sqrt{2x}} \cdot \dfrac{2x + 6 - 2x}{(x+3)^2} = \dfrac{6\sqrt{x+3}}{2\sqrt{2x}\,(x+3)^2} = \dfrac{3\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x}\,(x+3)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x} \cdot (3x^2 - 3) = \dfrac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x}$